TĂNG HẢI TUÂN

Admin diễn đàn Vật lí phổ thông
http://vatliphothong.vn

BẤT ĐẲNG THỨC

QUA CÁC ĐỀ THI CHỌN HSG MÔN TOÁN

CỦA CÁC TRƯỜNG, CÁC TỈNH TRÊN CẢ NƯỚC

NĂM HỌC 2014 - 2015

Hà Nội - 2015

1 Đề bài

Bài 1. Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $3\left(x^4+y^4+z^4\right)-7\left(x^2+y^2+z^2\right)+12=0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\frac{x^2}{y+2z}+\frac{y^2}{z+2x}+\frac{z^2}{x+2y}.$$

Chọn HSG Quốc gia, Yên Bái, 2014 - 2015

Bài 2. Cho 2014 số thực dương $a_1, a_2, ..., a_{2014}$ có tổng bằng 2014. Chứng minh rằng

$$\frac{a_1^{20}}{a_2^{11}}+\frac{a_2^{20}}{a_3^{11}}+...+\frac{a_{2014}^{20}}{a_1^{11}}\geq 2014.$$

Chọn HSG Quốc gia, Cần Thơ, 2014 - 2015

Bài 3. Tìm hằng số k lớn nhất với mọi a, b, c không âm thỏa mãn $a+b+c=1$ thì bất đẳng thức sau đúng

$$\frac{a}{1+9bc+k(b-c)^2}+\frac{b}{1+9ca+k(c-a)^2}+\frac{c}{1+9ab+k(a-b)^2}\geq\frac{1}{2}.$$

Chọn HSG Quốc gia, Hải Phòng, 2014 - 2015

Bài 4. Cho các số thực x, y, z thay đổi thỏa mãn $4^x+4^y+4^z=1$. Tìm giá trị lớn nhất của

$$S=2^{x+2y}+2^{y+2z}+2^{z+2x}-2^{x+y+z}$$

Chọn HSG Quốc gia, Hải Dương, 2014 - 2015

Bài 5. Cho các số x, y thỏa mãn: $0<x\leq 1, 0<y\leq 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$F=\frac{x^5+y+4}{x}+\frac{y^4-2y^3+x}{y^2}.$$

Chọn HSG Quốc gia, Cà Mau, 2014 - 2015

Bài 6. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $ab+bc+ca=1$. Chứng minh rằng

$$\frac{a^3}{1+9b^2ac}+\frac{b^3}{1+9c^2ba}+\frac{c^3}{1+9a^2cb}\geq\frac{(a+b+c)^3}{18}.$$

Chọn HSG Quốc gia, chuyên Quốc học Huế, 2014 - 2015

Bài 7. Cho a, b, c là các số không âm, không có hai số nào trong các số đó đồng thời bằng không. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P=\frac{a(b+c)}{a^2+bc}+\frac{b(c+a)}{b^2+ca}+\frac{c(a+b)}{c^2+ab}.$$

Chọn HSG Quốc gia, Thanh Hóa, 2014 - 2015

Bài 8. Chứng minh rằng với mọi số thực dương a, b, c ta có

$$\frac{a(b+c)}{(b+c)^2+a^2}+\frac{b(a+c)}{(a+c)^2+b^2}+\frac{c(a+b)}{(a+b)^2+c^2}\leq\frac{6}{5}.$$

Chọn HSG Quốc gia, Thái Bình, 2014 - 2015

Bài 9. Cho x, y, z là các số không âm. Chứng minh rằng

$$xyz + x^2 + y^2 + z^2 + 5 \geq 3\left(x + y + z\right).$$

Chọn HSG Quốc gia, Chuyên Lê Quý Đôn - Ninh Thuận, 2014 - 2015

Bài 10. Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{(a+b-c)^2}{(a+b)^2+c^2} + \frac{(a+c-b)^2}{(a+c)^2+b^2} + \frac{(c+b-a)^2}{(c+b)^2+a^2} \geq \frac{3}{5}.$$

Chọn HSG Quốc gia, Đăk Lăk, 2014 - 2015

Bài 11. Chứng minh bất đẳng thức sau

$$3(x^2 - x + 1)(y^2 - y + 1) \geq 2(x^2y^2 - xy + 1),\ \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Dấu "=" xảy ra khi nào?

Chọn HSG Quốc gia, Quảng Trị, 2014 - 2015

Bài 12. Cho x, y, z là các số thực không âm và đôi một phân biệt. Chứng minh rằng

$$\frac{x+y}{\left(x-y\right)^2} + \frac{y+z}{\left(y-z\right)^2} + \frac{z+x}{\left(z-x\right)^2} \geq \frac{9}{x+y+z}.$$

Chọn HSG Quốc gia, Chuyên ĐH Sư phạm Hà Nội, 2014 - 2015

Bài 13. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a + b + c = 3$. Chứng minh rằng

$$a^3 + b^3 + c^3 + 2\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \geq 3(ab + bc + ca).$$

Chọn HSG quốc gia, Lâm Đồng, 2014 - 2015

Bài 14. Cho ba số không âm a, b, c. Chứng minh rằng:

$$\sqrt{5a^2+4bc} + \sqrt{5b^2+4ca} + \sqrt{5c^2+4ab} \geq \sqrt{3(a^2+b^2+c^2)} + 2(\sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca}).$$

Chọn HSG quốc gia, Quảng Nam, 2014 - 2015

Bài 15. Cho ba số thực dương x, y, z thỏa mãn $2\sqrt{xy} + \sqrt{xz} = 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{3yz}{x} + \frac{4zx}{y} + \frac{5xy}{z} \geq 4.$$

Chọn HSG quốc gia, Tuyên Quang, 2014 - 2015

Bài 16. Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $x + y + z = xyz$. Chứng minh rằng

$$\frac{2}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+y^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+z^2}} \leq \frac{9}{4}.$$

Chọn HSG quốc gia, Thái Nguyên, 2014 - 2015

Bài 17. Cho các số thực không âm x, y, z thỏa mãn: $x^2 + y^2 + z^2 = 2$. Tìm giá trị lớn nhất của

$$M = \frac{x^2}{x^2 + yz + x + 1} + \frac{y + z}{z + y + x + 1} + \frac{1}{xyz + 3}.$$

Chọn HSG Quốc gia, Chuyên Hùng Vương - Phú Thọ, 2014 - 2015

Bài 18. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a + b + c = 6$. Chứng minh rằng khi đó ta có

$$\frac{a^2 + bc}{b} + \frac{b^2 + ca}{c} + \frac{c^2 + ab}{a} \geq a^2 + b^2 + c^2.$$

Chọn HSG tỉnh, Hải Phòng, 2014 - 2015

Bài 19. Cho a, b là 2 số thỏa mãn điều kiện: $a^2 + b^2 + 9 = 6a + 2b$. Chứng minh

$$4b \leq 3a.$$

Chọn HSG tỉnh Bình Thuận, 2014 - 2015

Bài 20. Cho ba số dương a, b, c thỏa mãn $a + b + c = 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = 7(a^4 + b^4 + c^4) + \frac{ab + bc + ca}{a^2b + b^2c + c^2a}.$$

Chọn HSG tỉnh Bà Rịa Vũng Tàu, 2014 - 2015

Bài 21. Cho a, b và c là các số thực dương. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \frac{a + 3c}{a + 2b + c} + \frac{4b}{a + b + 2c} - \frac{8c}{a + b + 3c}.$$

Chọn HSG tỉnh Kiên Giang, 2014 - 2015

Bài 22. Cho a, b, c là ba số thực dương thỏa mãn $abc = 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a^3 + b^3 + 1} + \frac{1}{b^3 + c^3 + 1} + \frac{1}{c^3 + a^3 + 1} \leq 1.$$

Chọn HSG tỉnh Long An, 2014 - 2015

Bài 23. Cho các số thực $a, b, c \geq 1$ thỏa mãn $a + b + c = 6$. Chứng minh rằng:

$$(a^2 + 2)(b^2 + 2)(c^2 + 2) \leq 216.$$

Chọn HSG tỉnh Vĩnh Phúc, 2014 - 2015

Bài 24. Cho a, b, c là các số thực dương. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = \frac{8a + 3b + 4(\sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt[3]{abc})}{1 + (a + b + c)^2}.$$

Chọn HSG tỉnh, Thanh Hóa, 2014 - 2015

Bài 25. Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $xy + yz + zx = 2xyz$. Chứng minh rằng:

$$\sqrt{\frac{x}{2y^2z^2 + xyz}} + \sqrt{\frac{y}{2z^2x^2 + xyz}} + \sqrt{\frac{z}{2x^2y^2 + xyz}} \leq 1.$$

Chọn HSG tỉnh, Gia Lai, 2014 - 2015

Bài 26. Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $x \leq 1, y \leq 2$ và $x + y + z = 6$. Chứng minh rằng

$$(x+1)(y+1)(z+1) \geq 4xyz.$$

Đề thi chuyển hệ lớp 10, THPT Chuyên Sư phạm, 2014 - 2015

Bài 27. Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $a + b + c = 1$. Chứng minh rằng

$$\frac{1+a}{1-a} + \frac{1+b}{1-b} + \frac{1+c}{1-c} \leq 2\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}\right).$$

Chọn đội tuyển Olympic Toán lớp 10 vòng 1, Chuyên Nguyễn Du, 2014 - 2015

Bài 28. Cho a, b, c, d là các số thực dương thỏa mãn $a + b + c + d = 4$. Chứng minh rằng

$$P = \frac{(a+\sqrt{b})^2}{\sqrt{a^2 - ab + b^2}} + \frac{(b+\sqrt{c})^2}{\sqrt{b^2 - bc + c^2}} + \frac{(c+\sqrt{d})^2}{\sqrt{c^2 - cd + d^2}} + \frac{(d+\sqrt{a})^2}{\sqrt{d^2 - ad + a^2}} \leq 16.$$

Đề thi khảo sát đội tuyển lớp 10 vòng 2, Chuyên KHTN, 2014 - 2015

Bài 29. Cho x, y, z là các số thực dương. Chứng minh:

$$\left(1 + \frac{x}{y}\right)\left(1 + \frac{y}{z}\right)\left(1 + \frac{z}{x}\right) \geq 2 + 2 \cdot \frac{x+y+z}{\sqrt[3]{xyz}}.$$

Chọn đội tuyển dự thi Olympic 30-4 lớp 10, tỉnh Bình Thuận, 2014 - 2015

2 Lời giải

Bài 1. Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $3\left(x^4+y^4+z^4\right)-7\left(x^2+y^2+z^2\right)+12=0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\frac{x^2}{y+2z}+\frac{y^2}{z+2x}+\frac{z^2}{x+2y}.$$

Chọn HSG Quốc gia, Yên Bái, 2014 - 2015

Lời giải

Sử dụng bất đẳng thức $Cauchy-Schwarz$, ta có $3(x^4+y^4+z^4)\geq\left(x^2+y^2+z^2\right)^2$, do đó

$$0\geq\left(x^2+y^2+z^2\right)^2-7(x^2+y^2+z^2)+12.$$

Từ đó suy ra $x^2+y^2+z^2\geq 3$. Sử dụng bất đẳng thức $Cauchy-Schwarz$, ta lại có

$$\begin{aligned}P&=\frac{x^2}{y+2z}+\frac{y^2}{z+2x}+\frac{z^2}{x+2y}\\&=\frac{x^4}{x^2y+2zx^2}+\frac{y^4}{y^2z+2xy^2}+\frac{z^4}{z^2x+2yz^2}\\&\geq\frac{\left(x^2+y^2+z^2\right)^2}{x^2y+y^2z+z^2x+2\left(xy^2+yz^2+zx^2\right)}.\end{aligned}$$

Tiếp tục sử dụng bất đẳng thức $Cauchy-Schwarz$ và kết hợp với bất đẳng thức quen thuộc $ab+bc+ca\leq\dfrac{(a+b+c)^2}{3}$, ta có

$$\begin{aligned}x^2y+y^2z+z^2x&\leq\sqrt{(x^2+y^2+z^2)\cdot(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2)}\\&\leq\sqrt{(x^2+y^2+z^2)\cdot\frac{\left(x^2+y^2+z^2\right)^2}{3}}\\&=\left(x^2+y^2+z^2\right)\sqrt{\frac{(x^2+y^2+z^2)}{3}}.\end{aligned}$$

Hoàn toàn tương tự, ta chứng minh được

$$2\left(xy^2+yz^2+zx^2\right)\leq 2\left(x^2+y^2+z^2\right)\sqrt{\frac{(x^2+y^2+z^2)}{3}}.$$

Từ đó suy ra

$$\begin{aligned}P&\geq\frac{\left(x^2+y^2+z^2\right)^2}{3\left(x^2+y^2+z^2\right)\sqrt{\dfrac{(x^2+y^2+z^2)}{3}}}\\&=\sqrt{\frac{x^2+y^2+z^2}{3}}\\&\geq 1.\end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z=1$ nên giá trị nhỏ nhất của P là 1. ■

Bài 2. Cho 2014 số thực dương $a_1, a_2, ..., a_{2014}$ có tổng bằng 2014. Chứng minh rằng

$$\frac{a_1^{20}}{a_2^{11}} + \frac{a_2^{20}}{a_3^{11}} + ... + \frac{a_{2014}^{20}}{a_1^{11}} \geq 2014.$$

Chọn HSG Quốc gia, Cần Thơ, 2014 - 2015

Lời giải

Sử dụng bất đẳng thức $AM - GM$ cho 20 số dương, ta có

$$\frac{a_1^{20}}{a_2^{11}} + 11 \cdot a_2 + 8 \geq 20 \cdot \sqrt[20]{\frac{a_1^{20}}{a_2^{11}} \cdot a_2^{11} \cdot 1^8} = 20 \cdot a_1.$$

Tương tự với 2013 số hạng còn lại, sau đó cộng vế với vế, và với chú ý $\sum\limits_{i=1}^{2014} a_i = 2014$ ta thu ngay được điều phải chứng minh.
Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi tất cả các biến bằng nhau và bằng 1. ■

Bài 3. Tìm hằng số k lớn nhất với mọi a, b, c không âm thỏa mãn $a + b + c = 1$ thì bất đẳng thức sau đúng

$$\frac{a}{1 + 9bc + k(b-c)^2} + \frac{b}{1 + 9ca + k(c-a)^2} + \frac{c}{1 + 9ab + k(a-b)^2} \geq \frac{1}{2}.$$

Chọn HSG Quốc gia, Hải Phòng, 2014 - 2015

Lời giải

Cho $a = b = \dfrac{1}{2}$ và $c = 0$ ta có $k \leq 4$ và ta sẽ chứng minh $k_{max} = 4$. Thật vậy, với $k = 4$ bất đẳng thức cần chứng minh trở thành

$$\frac{a}{1 + 9bc + 4(b-c)^2} + \frac{b}{1 + 9ca + 4(c-a)^2} + \frac{c}{1 + 9ab + 4(a-b)^2} \geq \frac{1}{2}.$$

Kí hiệu vế trái là A, sử dụng bất đẳng thức $Cauchy - Schwarz$ ta có

$$\begin{aligned} A &\geq \frac{(a+b+c)^2}{\sum \left(a + 9abc + 4a(b-c)^2\right)} \\ &= \frac{1}{1 + 27abc + 4a(b-c)^2 + 4b(c-a)^2 + 4c(a-b)^2}. \end{aligned}$$

Do đó, ta quy bài toán về chứng minh

$$1 + 27abc + 4a(b-c)^2 + 4b(c-a)^2 + 4c(a-b)^2 \leq 2.$$

Hay tương đương

$$4ab(a+b) + 4bc(b+c) + 4ca(c+a) + 3abc \leq 1.$$

Đồng bậc hóa bất đẳng thức này, ta cần chứng minh

$$4ab(a+b) + 4bc(b+c) + 4ca(c+a) + 3abc \leq (a+b+c)^3,$$

hay tương đương

$$a^3 + b^3 + c^3 + 3abc \geq ab(a+b) + bc(b+c) + ca(c+a).$$

Đây chính là bất đẳng thức *Schur* bậc 3, bài toán chứng minh xong.
Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = \dfrac{1}{2}, c = 0$ hoặc các hoán vị. ■

Bài 4. Cho các số thực x, y, z thay đổi thỏa mãn $4^x + 4^y + 4^z = 1$. Tìm giá trị lớn nhất của

$$S = 2^{x+2y} + 2^{y+2z} + 2^{z+2x} - 2^{x+y+z}$$

Chọn HSG Quốc gia, Hải Dương, 2014 - 2015

Lời giải

Đặt $a = 2^x, b = 2^y, c = 2^z$ thì ta có $a, b, c > 0$ và $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Khi đó ta cần tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$S = ab^2 + bc^2 + ca^2 - abc.$$

Không mất tính tổng quát, ta có thể giả sử b là số nằm giữa hai số a và c.
Khi đó ta có $a(a-b)(b-c) \geq 0$, tương đương

$$a^2b + abc \geq ca^2 + ab^2.$$

Sử dụng đánh giá này, kết hợp với bất đẳng thức $AM - GM$ bộ ba số, ta có

$$\begin{aligned} S &\leq a^2b + bc^2 \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{2b^2 \cdot (a^2+c^2) \cdot (a^2+c^2)} \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{\left(\frac{2b^2 + (a^2+c^2) + (a^2+c^2)}{3}\right)^3} \\ &= \frac{2\sqrt{3}}{9}. \end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ nên giá trị lớn nhất của S là $\dfrac{2\sqrt{3}}{9}$. ■

Bài 5. Cho các số x, y thỏa mãn: $0 < x \leq 1, 0 < y \leq 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$F = \frac{x^5 + y + 4}{x} + \frac{y^4 - 2y^3 + x}{y^2}.$$

Chọn HSG Quốc gia, Cà Mau, 2014 - 2015

Lời giải

Sử dụng bất đẳng thức $AM - GM$ và chú ý $\sqrt{y} \leq 1$, ta có

$$\begin{aligned} F &= \frac{x^5 + y + 4}{x} + \frac{y^4 - 2y^3 + x}{y^2} \\ &= x^4 + \frac{y}{x} + \frac{4}{x} + y^2 - 2y + \frac{x}{y^2} \\ &= \left(x^4 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x} + \frac{1}{x} + \frac{1}{x}\right) + \left(\frac{y}{x} + \frac{x}{y^2}\right) + (y-1)^2 - 1 \\ &\geq 5 + \frac{2}{\sqrt{y}} - 1 \\ &\geq 5 + 2 - 1 \\ &= 6. \end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = 1$ nên giá trị nhỏ nhất của F là 6. ■

Bài 6. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $ab + bc + ca = 1$. Chứng minh rằng

$$\frac{a^3}{1+9b^2ac} + \frac{b^3}{1+9c^2ba} + \frac{c^3}{1+9a^2cb} \geq \frac{(a+b+c)^3}{18}.$$

Chọn HSG Quốc gia, chuyên Quốc học Huế, 2014 - 2015

Lời giải

Sử dụng bất đẳng thức $Holder$, ta có

$$VT \cdot (1+9b^2ac+1+9c^2ba+1+9a^2cb) \cdot (1+1+1) \geq (a+b+c)^3.$$

Do đó ta cần chứng minh rằng

$$1+9b^2ac+1+9c^2ba+1+9a^2cb \leq 6,$$

tương đương

$$3abc(a+b+c) \leq 1 = (ab+bc+ca)^2.$$

Bất đẳng thức cuối luôn đúng nên phép chứng minh hoàn tất.
Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = \frac{1}{\sqrt{3}}$. ■

Bài 7. Cho a, b, c là các số không âm, không có hai số nào trong các số đó đồng thời bằng không. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \frac{a(b+c)}{a^2+bc} + \frac{b(c+a)}{b^2+ca} + \frac{c(a+b)}{c^2+ab}.$$

Chọn HSG Quốc gia, Thanh Hóa, 2014 - 2015

Lời giải

Bài này mình không giải được, mời các bạn tham khảo 2 lời giải sau đây:
Cách 1 (Nguyễn Văn Quý - quykhtn-qa1):
Không mất tính tổng quát, giả sử rằng $a \geq b \geq c \geq 0$, khi đó

$$\frac{a(b+c)}{a^2+bc} \geq \frac{a(b+c)}{a^2+ac} = \frac{b+c}{a+c} \geq \frac{b}{a},$$

và

$$\frac{c(a+b)}{c^2+ab} \geq \frac{c(a+b)}{b^2+ab} = \frac{c}{b}.$$

Từ đó,

$$\frac{a(b+c)}{a^2+bc} + \frac{b(c+a)}{b^2+ca} + \frac{c(a+b)}{c^2+ab} \geq \frac{b}{a} + \frac{ab}{b^2+ca} + \frac{c}{b} = \frac{b^2+ca}{ab} + \frac{ab}{b^2+ca} \geq 2.$$

Đẳng thức xảy ra khi $a = b, c = 0$ hoặc các hoán vị nên giá trị nhỏ nhất của P là 2. ■
Cách 2 (Võ Quốc Bá Cẩn):
Không mất tính tổng quát, giả sử $a \geq b \geq c$. Khi đó, ta có

$$\begin{aligned}\frac{a(b+c)}{a^2+bc} + \frac{b(c+a)}{b^2+ca} - 2 &= \frac{(a-b)(c-a)}{a^2+bc} + \frac{(a-b)(b-c)}{b^2+ca} \\ &= \frac{(a-b)^2(c^2-2ac-2bc+ab)}{(a^2+bc)(b^2+ca)} \\ &= \frac{(a-b)^2(c^2+ab)}{(a^2+bc)(b^2+ca)} - \frac{2c(a+b)(a-b)^2}{(a^2+bc)(b^2+ca)}.\end{aligned}$$

Bất đẳng thức cần chứng minh trở thành

$$\frac{(a-b)^2(c^2+ab)}{(a^2+bc)(b^2+ca)}+\frac{c(a+b)}{c^2+ab}\geq\frac{2c(a+b)(a-b)^2}{(a^2+bc)(b^2+ca)}.$$

Đến đây, sử dụng bất đẳng thức $AM-GM$ ta có

$$\frac{(a-b)^2(c^2+ab)}{(a^2+bc)(b^2+ca)}+\frac{c(a+b)}{c^2+ab}\geq\frac{2(a-b)\sqrt{c(a+b)}}{\sqrt{(a^2+bc)(b^2+ca)}}.$$

Từ đó, bài toán được đưa về chứng minh

$$(a^2+bc)(b^2+ca)\geq c(a+b)(a-b)^2,$$

hiển nhiên đúng do ta có $a^2+bc\geq a^2\geq (a-b)^2$ và $b^2+ca\geq c(a+b)$.
Phép chứng minh được hoàn tất. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b, c=0$ (và các hoán vị tương ứng). ■

Bài 8. Chứng minh rằng với mọi số thực dương a, b, c ta có

$$\frac{a(b+c)}{(b+c)^2+a^2}+\frac{b(a+c)}{(a+c)^2+b^2}+\frac{c(a+b)}{(a+b)^2+c^2}\leq\frac{6}{5}.$$

Chọn HSG Quốc gia, Thái Bình, 2014 - 2015

Lời giải

Cách 1: Do tính thuần nhất nên ta có thể chuẩn hóa cho $a+b+c=3$, khi đó ta có

$$\begin{aligned}\frac{a(b+c)}{(b+c)^2+a^2}&=\frac{a(3-a)}{(3-a)^2+a^2}\\&=\frac{9a+1}{25}-\frac{9(a-1)^2(2a+1)}{25\left[(3-a)^2+a^2\right]}\\&\leq\frac{9a+1}{25}.\end{aligned}$$

Tương tự với hai biểu thức còn lại, sau đó cộng vế với vế và chú ý $a+b+c=3$ ta thu ngay được điều phải chứng minh.
Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$. ■
Cách 2: Sử dụng bất đẳng thức $AM-GM$, ta có $a^2+\dfrac{(b+c)^2}{4}\geq a(b+c)$, từ đó

$$\begin{aligned}\frac{a(b+c)}{(b+c)^2+a^2}&\leq\frac{a(b+c)}{\dfrac{3(b+c)^2}{4}+a(b+c)}\\&=1-\frac{\dfrac{3(b+c)^2}{4}}{\dfrac{3(b+c)^2}{4}+a(b+c)}\\&=1-\frac{3(b+c)^2}{3(b+c)^2+4a(b+c)}.\end{aligned}$$

Bài toán đưa về chứng minh

$$\frac{(b+c)^2}{3(b+c)^2+4a(b+c)}+\frac{(c+a)^2}{3(c+a)^2+4b(c+a)}+\frac{(a+b)^2}{3(a+b)^2+4c(a+b)}\geq\frac{3}{5}.$$

Sử dụng bất đẳng thức $Cauchy - Schwarz$ ta có

$$VT \geq \frac{4(a+b+c)^2}{3(b+c)^2 + 4a(b+c) + 3(c+a)^2 + 4b(c+a) + 3(a+b)^2 + 4c(a+b)}.$$

Từ đó bài toán sẽ được chứng minh nếu ta chỉ ra được

$$\frac{4(a+b+c)^2}{3(b+c)^2 + 4a(b+c) + 3(c+a)^2 + 4b(c+a) + 3(a+b)^2 + 4c(a+b)} \geq \frac{3}{5}.$$

Thật vậy, sau khi quy đồng, khử mẫu và rút gọn, thì bất đẳng thức trên tương đương với

$$2(a^2 + b^2 + c^2) \geq 2(ab + bc + ca).$$

Hiển nhiên đúng. Bài toán được chứng minh xong.
Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$. ■

Bài 9. Cho x, y, z là các số không âm. Chứng minh rằng

$$xyz + x^2 + y^2 + z^2 + 5 \geq 3\left(x + y + z\right).$$

Chọn HSG Quốc gia, Chuyên Lê Quý Đôn - Ninh Thuận, 2014 - 2015

Lời giải

Theo nguyên lí *Dirichlet* thì trong ba số x, y, z luôn tồn tại hai số nằm cùng phía so với 1, không mất tính tổng quát ta có thể giả sử rằng hai số đó là x và y. Khi đó $z(x-1)(y-1) \geq 0$, hay tương đương

$$xyz \geq xz + yz - z.$$

Cách 1: Sử dụng đánh giá này, ta quy bài toán về chứng minh

$$f(z) = z^2 + (x + y - 4) \cdot z + x^2 + y^2 + 5 - 3x - 3y \geq 0.$$

Đây là một hàm bậc hai theo z với hệ số của z^2 dương, mặt khác

$$\begin{aligned}\Delta &= (x+y-4)^2 - 4(x^2 + y^2 - 3x - 3y + 5)\\ &= -3x^2 - 3y^2 + 2xy + 4x + 4y - 4\\ &= -(x-y)^2 - 2(x-1)^2 - 2(y-1)^2\\ &\leq 0.\end{aligned}$$

Nên từ đó suy ra $f(z) \geq 0,\ \forall z$.
Bài toán được chứng minh xong.
Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z = 1$. ■
Cách 2: Sử dụng bất đẳng thức $AM - GM$ ta có

$$3(x + y + z) \leq \frac{(x+y+z)^2 + 9}{2},$$

nên ta quy bài toán về chứng minh bất đẳng thức mạnh hơn là

$$2xyz + 2(x^2 + y^2 + z^2) + 10 \geq (x + y + z)^2 + 9,$$

hay tương đương

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2xyz + 1 \geq 2(xy + yz + zx).$$

Sử dụng $xyz \geq xz + yz - z$ thì ta cần phải chứng minh

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2(xz + yz - z) + 1 \geq 2xy + 2yz + 2zx,$$

hay

$$(x - y)^2 + (z - 1)^2 \geq 0.$$

Bất đẳng thức cuối luôn đúng nên bài toán được chứng minh xong.
Ngoài ra, ta còn có thể chứng minh bất đẳng thức trên bằng cách sau: Sử dụng bất đẳng thức $AM - GM$ bộ ba số, ta có

$$2xyz + 1 \geq 3\sqrt[3]{x^2y^2z^2} = \frac{3xyz}{\sqrt[3]{xyz}} \geq \frac{9xyz}{x + y + z}.$$

Do đó, ta cần chứng minh

$$x^2 + y^2 + z^2 + \frac{9xyz}{x + y + z} \geq 2(xy + yz + zx).$$

Đây chính là bất đẳng thức *Schur* nên bài toán được chứng minh xong.
Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z = 1$. ■

Bài 10. Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{(a + b - c)^2}{(a + b)^2 + c^2} + \frac{(a + c - b)^2}{(a + c)^2 + b^2} + \frac{(c + b - a)^2}{(c + b)^2 + a^2} \geq \frac{3}{5}.$$

Chọn HSG Quốc gia, Đăk Lăk, 2014 - 2015

Lời giải

Để ý rằng $\dfrac{(a + b - c)^2}{(a + b)^2 + c^2} = 1 - \dfrac{2c(a + b)}{(a + b)^2 + c^2}$ nên bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với bất đẳng thức ở **Bài 8.**
Bài toán được chứng minh xong. ■

Bài 11. Chứng minh bất đẳng thức sau

$$3(x^2 - x + 1)(y^2 - y + 1) \geq 2(x^2y^2 - xy + 1),\ \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Dấu "=" xảy ra khi nào?

Chọn HSG Quốc gia, Quảng Trị, 2014 - 2015

Lời giải

Do vai trò của x, y là như nhau, nên dự đoán đẳng thức xảy ra khi $x = y$. Khi đó ta có $3(x^2 - x + 1)^2 = 2(x^4 - x^2 + 1)$, tương đương với

$$(x^2 - 3x + 1)^2 = 0.$$

Từ đó $x = y = \dfrac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$. Quay trở lại bài toán, bất đẳng thức cần chứng minh tương đương

$$x^2y^2 - xy + 1 + 3(x + y)^2 - 3xy(x + y) - 3(x + y) \geq 0,$$

hay

$$P^2 - P + 1 + 3S^2 - 3SP - 3S \geq 0.$$

Nếu coi đây là một bất đẳng thức bậc hai theo P thì ta có

$$\begin{aligned}\Delta_P &= (1+3S)^2 - 4(3S^2 - 3S + 1)\\ &= -3S^2 + 18S - 3.\end{aligned}$$

Nếu $S \le 0$ thì $\Delta_P < 0$ nên $f(P) > 0$. Do đó ta chỉ cần xét trường hợp $S > 0$.
Trong trường hợp $S > 0$, lại coi bất đẳng thức trên là một bất đẳng thức bậc hai theo S, khi đó ta có

$$\begin{aligned}\Delta_S &= 9(1+P)^2 - 12(P^2 - P + 1)\\ &= -3P^2 + 30P - 3.\end{aligned}$$

Nếu $P \le 0$ thì $\Delta_S < 0$ nên $f(S) > 0$. Do đó ta chỉ cần xét $P > 0$ là đủ.
Nếu $P - 4\sqrt{P} + 1 > 0$ tức là $(P+1)^2 > 16P$ hay $P^2 - 10P + 1 > 4P$, khi đó

$$\Delta_S = -3\left(P^2 - 10P + 1\right) < -12P < 0,$$

nên suy ra $f(S) > 0$.
Nếu $P - 4\sqrt{P} + 1 \le 0$, và chú ý $S^2 \ge 4P$ nên $S \ge 2\sqrt{P}$ thì ta có

$$\begin{aligned}f'(S) &= 6S - 3P - 3\\ &\ge 12\sqrt{P} - 3P - 3\\ &= -3(P - 4\sqrt{P} + 1)\\ &\ge 0,\ \forall S > 2\sqrt{P}.\end{aligned}$$

Do đó $f(S)$ là một hàm đồng biến trên $[2\sqrt{P}; +\infty)$, nên $f(S) \ge f(2\sqrt{P})$, tức là

$$\begin{aligned}f(S) &\ge P^2 - P + 1 + 3\cdot 4P - 6P\sqrt{P} - 6\sqrt{P}\\ &= \left(P - 3\sqrt{P} + 1\right)^2\\ &\ge 0.\end{aligned}$$

Bất đẳng thức cuối luôn đúng nên bài toán chứng minh xong.
Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = \dfrac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$. ■

Bài 12. Cho x, y, z là các số thực không âm và đôi một phân biệt. Chứng minh rằng

$$\frac{x+y}{(x-y)^2} + \frac{y+z}{(y-z)^2} + \frac{z+x}{(z-x)^2} \ge \frac{9}{x+y+z}.$$

Chọn HSG Quốc gia, Chuyên ĐH Sư phạm Hà Nội, 2014 - 2015

Lời giải

Không mất tính tổng quát, giả sử $x \ge y \ge z \ge 0$. Khi đó ta có

$$\begin{aligned}\frac{y+z}{(y-z)^2} &= \frac{1}{y} + \frac{z(3y-z)}{y(y-z)^2} \ge \frac{1}{y},\\ \frac{z+x}{(z-x)^2} &= \frac{1}{x} + \frac{z\,(3x-z)}{x(z-x)^2} \ge \frac{1}{x}.\end{aligned}$$

Kết hợp đánh giá trên và sử dụng bất đẳng thức $AM-GM$, ta có

$$\begin{aligned}
VT\cdot(x+y+z) &\geq \frac{(x+y+z)(x+y)}{(x-y)^2}+(x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)\\
&\geq \frac{(x+y)^2}{(x-y)^2}+\frac{(x+y)^2}{xy}\\
&=1+\frac{4xy}{(x-y)^2}+4+\frac{(x-y)^2}{xy}\\
&\geq 5+2\sqrt{\frac{4xy}{(x-y)^2}\cdot\frac{(x-y)^2}{xy}}\\
&=9.
\end{aligned}$$

Phép chứng minh hoàn tất.
Với $x\geq y\geq z\geq 0$ thì đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=(2+\sqrt{3})y,\ z=0.$ ■

Bài 13. Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn $a+b+c=3$. Chứng minh rằng

$$a^3+b^3+c^3+2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\geq 3(ab+bc+ca).$$

Chọn HSG quốc gia, Lâm Đồng, 2014 - 2015

Lời giải

Sử dụng bất đẳng thức $Cauchy-Schwarz$ ta có

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geq\frac{9}{a+b+c}=3.$$

Do đó ta cần chứng minh

$$a^3+b^3+c^3+6\geq 3(ab+bc+ca).$$

Sử dụng bất đẳng thức $AM-GM$ dễ thấy rằng $a^3+1+1\geq 3a$, do đó ta cần chứng minh

$$3(a+b+c)\geq 3(ab+bc+ca),$$

hay tương đương

$$(a+b+c)^2\geq 3(ab+bc+ca).$$

Hiển nhiên đúng. Bài toán được chứng minh xong.
Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1.$ ■

Bài 14. Cho ba số không âm a,b,c. Chứng minh rằng:

$$\sqrt{5a^2+4bc}+\sqrt{5b^2+4ca}+\sqrt{5c^2+4ab}\geq\sqrt{3(a^2+b^2+c^2)}+2(\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}).$$

Chọn HSG quốc gia, Quảng Nam, 2014 - 2015

Lời giải

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương

$$\sum\left(\sqrt{5a^2+4bc}-2\sqrt{bc}\right)\geq\sqrt{3\left(a^2+b^2+c^2\right)},$$

$$\sum \frac{5a^2}{\sqrt{3\left(a^2+b^2+c^2\right)}\left(\sqrt{5a^2+4bc}+2\sqrt{bc}\right)} \geq 1.$$

Sử dụng bất đẳng thức $AM-GM$, ta có

$$\begin{aligned}
&\sqrt{3(a^2+b^2+c^2)} \cdot \sqrt{5a^2+4bc} \leq \frac{8a^2+3b^2+3c^2+4bc}{2},\\
&\sqrt{3(a^2+b^2+c^2)} \cdot 2\sqrt{bc} \leq a^2+b^2+c^2+3bc.
\end{aligned}$$

Do đó

$$\begin{aligned}
\sqrt{3\left(a^2+b^2+c^2\right)}\left(\sqrt{5a^2+4bc}+2\sqrt{bc}\right) &\leq \frac{8a^2+3b^2+3c^2+4bc}{2}+a^2+b^2+c^2+3bc\\
&= \frac{10a^2+5(b+c)^2}{2}.
\end{aligned}$$

Từ đó, sử dụng đánh giá trên và kết hợp với bất đẳng thức quen thuộc $(b+c)^2 \leq 2(b^2+c^2)$, ta có

$$\begin{aligned}
\sum \frac{5a^2}{\sqrt{3\left(a^2+b^2+c^2\right)}\left(\sqrt{5a^2+4bc}+2\sqrt{bc}\right)} &\geq \sum \frac{10a^2}{10a^2+5(b+c)^2}\\
&= \sum \frac{2a^2}{2a^2+(b+c)^2}\\
&\geq \sum \frac{2a^2}{2a^2+2(b^2+c^2)}\\
&= \frac{a^2}{a^2+b^2+c^2}+\frac{b^2}{a^2+b^2+c^2}+\frac{c^2}{a^2+b^2+c^2}\\
&= 1.
\end{aligned}$$

Bài toán được chứng minh xong.
Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$. ■

Bài 15. Cho ba số thực dương x, y, z thỏa mãn $2\sqrt{xy}+\sqrt{xz}=1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{3yz}{x}+\frac{4zx}{y}+\frac{5xy}{z} \geq 4.$$

Chọn HSG quốc gia, Tuyên Quang, 2014 - 2015

Lời giải

Nhìn bất đẳng thức không có dạng đối xứng, nên ban đầu mình đoán đẳng thức xảy ra khi các biến không bằng nhau. Sau một hồi suy nghĩ không tìm được đẳng thức xảy ra khi nào, mình đã thử cho trường hợp $x=y=z$ và âu mai gót, nó xảy ra khi $x=y=z=\dfrac{1}{3}$.
Sử dụng bất đẳng thức $AM-GM$, ta có

$$1 = 2\sqrt{xy}+\sqrt{xz} \leq x+y+\frac{x+z}{2} = \frac{3x+2y+z}{2},$$

từ đó suy ra $3x+2y+z \geq 2$. Như vậy, ta sẽ tìm cách đánh giá sao cho

$$\frac{3yz}{x}+\frac{4zx}{y}+\frac{5xy}{z} \geq 2\cdot(3x+2y+z).$$

Chú ý rằng $\frac{yz}{x}\cdot\frac{zx}{y}=z, \frac{xy}{z}\cdot\frac{zx}{y}=x, \frac{xy}{z}\cdot\frac{yz}{x}=y$ nên để đánh giá vế trái về x,y,z thì ta sẽ sử dụng bất đẳng thức $AM-GM$ cho hai số. Sử dụng bất đẳng thức $AM-GM$, ta có

$$(a+c)\frac{yz}{x}+(b+e)\frac{zx}{y}+(d+f)\frac{xy}{z}\geq 2\left(\sqrt{ef}\cdot x+\sqrt{cd}\cdot y+\sqrt{ab}\cdot z\right).$$

Vì ta đã dự đoán được dấu bằng xảy ra khi $x=y=z$ nên để dấu bằng của bất đẳng thức $AM-GM$ thỏa mãn, ta cần có $a=b, c=d, e=f$. Mặt khác theo giả thiết, ta phải có $a+c=3$, $b+e=4$, $d+f=5$. Từ đó suy ra $e=f=3$, $c=d=2$, $a=b=1$. Như vậy, ta trình bày như sau

$$\begin{aligned}VT&=\left(\frac{yz}{x}+\frac{zx}{y}\right)+2\left(\frac{yz}{x}+\frac{xy}{z}\right)+3\left(\frac{xz}{y}+\frac{xy}{z}\right)\\&\geq 2z+4y+6x\\&=2\cdot(3x+2y+z)\\&\geq 4.\end{aligned}$$

Bài toán được chứng minh xong. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z=\frac{1}{3}$. ■

Bài 16. Cho x,y,z là các số thực dương thỏa mãn $x+y+z=xyz$. Chứng minh rằng

$$\frac{2}{\sqrt{1+x^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+y^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+z^2}}\leq\frac{9}{4}.$$

Chọn HSG quốc gia, Thái Nguyên, 2014 - 2015

Lời giải

Cách 1:
Đặt $a=\frac{1}{x}, b=\frac{1}{y}, c=\frac{1}{z}$ ta có $ab+bc+ca=1$. Khi đó

$$\begin{aligned}&\frac{2a}{\sqrt{1+a^2}}+\frac{b}{\sqrt{1+b^2}}+\frac{c}{\sqrt{1+c^2}}\\&=\frac{2a}{\sqrt{(a+b)(a+c)}}+\frac{b}{\sqrt{(b+a)(b+c)}}+\frac{c}{\sqrt{(c+a)(c+b)}}.\end{aligned}$$

Đến đây, ta cần đánh giá sao cho nó bé hơn hoặc bằng $\frac{9}{4}$. Nhìn dấu căn như thế làm ta nhớ đến ngay bất đẳng thức $AM-GM$. Tuy nhiên ta không thể sử dụng bất đẳng thức $AM-GM$ kiểu như $\sqrt{(a+b)(a+c)}\leq\frac{a+b+a+c}{2}$ bởi vì khi đó sẽ cho ra một đánh giá $\geq$, mà ta cần ở đây là $\leq$.
Chú ý là

$$\frac{1}{\sqrt{(a+b)(a+c)}}=\sqrt{\frac{1}{a+b}\cdot\frac{1}{a+c}},$$

nên ta sẽ đánh giá bằng $AM-GM$ kiểu như

$$\sqrt{\frac{1}{a+b}\cdot\frac{1}{a+c}}\leq\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{a+c}\right).$$

Tuy nhiên ta không thể đánh giá bừa được. Vì ta chưa biết dấu đẳng thức xảy ra khi nào. Đã đến lúc dự đoán đẳng thức đạt được khi nào.
Vì bất đẳng thức cần chứng minh đối xứng với hai biến b và c, nên ta dự đoán đẳng thức đạt được khi $b=c$. Khi đó thì

$$\frac{1}{a+b}=\frac{1}{a+c}, \frac{1}{b+c}=k\cdot\frac{1}{b+a}=k\cdot\frac{1}{a+c}.$$

Ta sẽ tìm k. Sử dụng bất đẳng thức $AM-GM$, ta có

$$\begin{aligned}
&\frac{2a}{\sqrt{(a+b)(a+c)}}+\frac{b}{\sqrt{(b+a)(b+c)}}+\frac{c}{\sqrt{(c+a)(c+b)}}\\
&=a\cdot 2\cdot\sqrt{\frac{1}{a+b}\cdot\frac{1}{a+c}}+\frac{b}{\sqrt{k}}\cdot\sqrt{\frac{1}{b+a}\cdot k\frac{1}{b+c}}+\frac{c}{\sqrt{k}}\cdot\sqrt{\frac{1}{c+a}\cdot k\frac{1}{c+b}}\\
&\le a\cdot\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{a+c}\right)+\frac{b}{2\sqrt{k}}\cdot\left(\frac{1}{b+a}+k\frac{1}{b+c}\right)+\frac{c}{2\sqrt{k}}\cdot\left(\frac{1}{c+a}+k\frac{1}{c+b}\right)\\
&=\frac{a+\dfrac{b}{2\sqrt{k}}}{a+b}+\frac{a+\dfrac{c}{2\sqrt{k}}}{a+c}+\frac{\dfrac{b\sqrt{k}}{2}+\dfrac{c\sqrt{k}}{2}}{c+b}\\
&=\frac{1}{2\sqrt{k}}\cdot\frac{2\sqrt{k}a+b}{a+b}+\frac{1}{2\sqrt{k}}\cdot\frac{2\sqrt{k}a+c}{a+c}+\frac{\sqrt{k}}{2}.
\end{aligned}$$

Để biểu thức cuối cùng là một số không đổi thì điều kiện cần là $\dfrac{2\sqrt{k}}{1}=\dfrac{1}{1}$. Suy ra $k=\dfrac{1}{4}$. Với $k=\dfrac{1}{4}$ thì

$$\frac{1}{2\sqrt{k}}\cdot\frac{2\sqrt{k}a+b}{a+b}+\frac{1}{2\sqrt{k}}\cdot\frac{2\sqrt{k}a+c}{a+c}+\frac{\sqrt{k}}{2}=\frac{9}{4}.$$

Con số $\dfrac{9}{4}$ chính là điều chúng ta mong muốn. Bài toán được chứng minh xong.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $ab+bc+ca=1, a=7b=7c$ tương đương $a=\dfrac{7}{\sqrt{15}}, b=c=\dfrac{1}{\sqrt{15}}$ hay $x=\dfrac{\sqrt{15}}{7}, y=z=\sqrt{15}$. ■

Cách 2:

Với điều kiện $ab+bc+ca=1$, ta nhớ đến công thức lượng giác trong tam giác

$$\tan A\tan B+\tan B\tan C+\tan C\tan A=1.$$

Do đó, ta có thể đặt $a=\tan A, b=\tan B, c=\tan C$, với A, B, C là ba góc của một tam giác. Khi đó, ta cần chứng minh

$$2\cos A+\cos B+\cos C\le\frac{9}{4}.$$

Thật vậy, bằng một vài phép biến đổi lượng giác, với chú ý $\cos\dfrac{B+C}{2}=\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{A}{2}\right)=\sin\dfrac{A}{2}$, ta có

$$\begin{aligned}
&2\cos A+\cos B+\cos C\\
&=2\left(1-2\sin^2\frac{A}{2}\right)+2\cos\frac{B-C}{2}\cos\frac{B+C}{2}\\
&=-2\left(2\sin^2\frac{A}{2}-\cos\frac{B-C}{2}\sin\frac{A}{2}\right)+2\\
&=-2\left[\left(\sqrt{2}\cdot\sin\frac{A}{2}\right)^2-2\cdot\sqrt{2}\sin\frac{A}{2}\cdot\frac{1}{2\sqrt{2}}\cos\frac{B-C}{2}+\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\cos\frac{B-C}{2}\right)^2\right]+\frac{1}{4}\cos^2\frac{B-C}{2}+2\\
&=-2\left(\sqrt{2}\sin\frac{A}{2}-\frac{1}{2\sqrt{2}}\cos\frac{B-C}{2}\right)^2+\frac{1}{4}\left(1-\sin^2\frac{B-C}{2}\right)+2\\
&\le\frac{1}{4}+2\\
&=\frac{9}{4}.
\end{aligned}$$

Bài toán được chứng minh xong. ■

Bài 17. Cho các số thực không âm x, y, z thỏa mãn: $x^2+y^2+z^2=2$. Tìm giá trị lớn nhất của

$$M=\frac{x^2}{x^2+yz+x+1}+\frac{y+z}{z+y+x+1}+\frac{1}{xyz+3}.$$

Chọn HSG Quốc gia, Chuyên Hùng Vương - Phú Thọ, 2014 - 2015

Lời giải

Đầu tiên, ta sẽ chứng minh

$$\frac{x^2}{x^2+yz+x+1}\leq\frac{x}{z+y+x+1}.$$

Thật vậy, vì $x\geq 0$ nên ta chỉ cần chứng minh

$$\begin{aligned}x(z+y+x+1)&\leq x^2+yz+x+1,\\ xz+xy&\leq yz+1,\\ 2xz+2xy&\leq 2yz+2,\\ 2xz+2xy-2yz-\left(x^2+y^2+z^2\right)&\leq 0,\\ -(x-y-z)^2&\leq 0,\ \text{luôn đúng.}\end{aligned}$$

Từ đó, ta có

$$\begin{aligned}M&\leq\frac{x+y+z}{x+y+z+1}+\frac{1}{xyz+3}\\ &=1-\frac{1}{x+y+z+1}+\frac{1}{xyz+3}\\ &=1-\frac{xyz+2-(x+y+z)}{(xyz+3)(x+y+z+1)}.\end{aligned}$$

Ta sẽ chứng minh

$$xyz+2\geq x+y+z\quad(1)$$

Cách 1:

Không mất tính tổng quát, giả sử z là số lớn nhất trong 3 số x, y, z. Dễ thấy $z\geq\sqrt{\frac{2}{3}}$. Đặt $S=x+y$. Từ giả thiết ta có $S^2+z^2=2+2xy$ nên suy ra $2xy=S^2+z^2-2$. Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương

$$\begin{gathered}2xyz+4\geq 2(x+y+z),\\ \left(S^2+z^2\right)z+4\geq 2S+2z,\\ f(S)=zS^2-2S+z^3-2z+4\geq 0.\end{gathered}$$

Vì $z>0$, mặt khác

$$\begin{aligned}\Delta'_S&=1-z\left(z^3-4z+4\right)\\ &=-(z-1)^2\left(z^2+2z-1\right)\\ &\leq 0,\forall z\geq\sqrt{\frac{2}{3}}.\end{aligned}$$

Nên từ đó suy ra $f(S)\geq 0$. Như vậy (1) đã được chứng minh. Từ đó suy ra

$$M\leq 1.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=0, y=z=1$ nên giá trị lớn nhất của M là 1. ■

Cách 2:
Sử dụng bất đẳng thức $AM - GM$, ta có $2 = x^2 + y^2 + z^2 \geq y^2 + z^2 \geq 2yz$ nên suy ra $yz \leq 1$.
Sử dụng bất đẳng thức $Cauchy - Schwarz$ và điều thu được bên trên, ta có

$$\begin{aligned}(x+y+z-xyz)^2 &= [x(1-yz)+y+z]^2\\ &\leq \left[x^2+(y+z)^2\right]\cdot\left[(1-yz)^2+1\right]\\ &= (2+2yz)\cdot\left(y^2z^2-2yz+2\right)\\ &= 4+2y^2z^2\,(yz-1)\\ &\leq 4.\end{aligned}$$

Như vậy (1) được chứng minh. Từ đó suy ra

$$M \leq 1.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = 0, y = z = 1$ nên giá trị lớn nhất của M là 1. ■

Bài 18. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a + b + c = 6$. Chứng minh rằng khi đó ta có

$$\frac{a^2+bc}{b}+\frac{b^2+ca}{c}+\frac{c^2+ab}{a} \geq a^2+b^2+c^2.$$

Chọn HSG tỉnh, Hải Phòng, 2014 - 2015

Lời giải

Không mất tính tổng quát, giả sử b là số nằm giữa hai số a và c. Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\frac{(a-b)^2}{b}+\frac{(b-c)^2}{c}+\frac{(c-a)^2}{a} \geq \frac{6(a^2+b^2+c^2)}{a+b+c}-2(a+b+c).$$

Sử dụng bất đẳng thức $Cauchy - Schwarz$ ta có

$$\frac{(a-b)^2}{b}+\frac{(b-c)^2}{c}+\frac{(c-a)^2}{a} \geq \frac{(a-b+b-c+a-c)^2}{a+b+c}=\frac{4(a-c)^2}{a+b+c}.$$

Do đó, ta cần phải chứng minh

$$\frac{4(a-c)^2}{a+b+c} \geq \frac{6(a^2+b^2+c^2)}{a+b+c}-2(a+b+c),$$

hay tương đương

$$\begin{gathered}4(a-c)^2 \geq 6(a^2+b^2+c^2)-2(a+b+c)^2,\\ 4(a-c)^2 \geq 2(a-b)^2+2(b-c)^2+2(c-a)^2,\\ (a-c)^2 \geq (a-b)^2+(b-c)^2,\\ 2(a-b)(b-c) \geq 0.\end{gathered}$$

Bất đẳng thức cuối hiển hiên đúng do b là số nằm giữa hai số a và c. Bài toán được chứng minh xong.
Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 2$. ■

Bài 19. Cho a, b là 2 số thỏa mãn điều kiện: $a^2+b^2+9=6a+2b$. Chứng minh

$$4b \leq 3a.$$

Chọn HSG tỉnh Bình Thuận, 2014 - 2015

Lời giải

Dự đoán dấu bằng khi $4b=3a$, kết hợp với giả thiết $a^2+b^2+9=6a+2b$ dễ thấy $a=\dfrac{12}{5}, b=\dfrac{9}{5}$.
Từ dự đoán đó ta có lời giải như sau:
Sử dụng bất đẳng thức $AM-GM$, ta có

$$a^2+\left(\frac{12}{5}\right)^2 \geq \frac{24a}{5},$$

$$b^2+\left(\frac{9}{5}\right)^2 \geq \frac{18b}{5}.$$

Cộng vế với vế hai bất đẳng thức trên, ta thu được

$$a^2+b^2+9 \geq \frac{24a+18b}{5},$$

hay tương đương

$$6a+2b \geq \frac{24a+18b}{5}.$$

Từ đó ta có

$$4b \leq 3a.$$

Phép chứng minh hoàn tất.
Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=\dfrac{12}{5}, b=\dfrac{9}{5}$. ■

Bài 20. Cho ba số dương a, b, c thỏa mãn $a+b+c=3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=7(a^4+b^4+c^4)+\frac{ab+bc+ca}{a^2b+b^2c+c^2a}.$$

Chọn HSG tỉnh Bà Rịa Vũng Tàu, 2014 - 2015

Lời giải

Không mất tính tổng quát, giả sử b là số nằm giữa a và c, khi đó ta có $c(a-b)(b-c) \geq 0$, tương đương

$$a^2b+b^2c+c^2a \leq b(a^2+ca+c^2).$$

Từ đó, kết hợp với bất đẳng thức $AM-GM$ bộ ba số, ta có

$$\begin{aligned}
\left(a^2b+b^2c+c^2a\right)(ab+bc+ca) &\leq b(a^2+ca+c^2)(ab+bc+ca) \\
&\leq \frac{\left(3b+a^2+ca+c^2+ab+bc+ca\right)^3}{3^4} \\
&= \frac{\left((a+c)^2+3b+ab+bc\right)^3}{3^4} \\
&= \frac{\left((3-b)^2+3b+b(3-b)\right)^3}{3^4} \\
&= 9.
\end{aligned}$$

Mặt khác, theo bất đẳng thức $Cauchy - Schwarz$ thì

$$a^4+b^4+c^4 \geq \frac{(a^2+b^2+c^2)^2}{3}.$$

Do đó, sử dụng các đánh giá trên, sau đó liên tục dùng $Cauchy - Schwarz$ ta có

$$\begin{aligned}
P &\geq \frac{7}{3}\left(a^2+b^2+c^2\right)^2+\frac{(ab+bc+ca)^2}{9}\\
&= \frac{41}{18}\left(a^2+b^2+c^2\right)^2+\frac{\left(a^2+b^2+c^2\right)^2+(ab+bc+ca)^2+(ab+bc+ca)^2}{18}\\
&\geq \frac{41}{18}\cdot\frac{(a+b+c)^4}{3^2}+\frac{\left(a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca+ab+bc+ca\right)^2}{18\cdot 3}\\
&= \frac{22}{81}(a+b+c)^4\\
&= 22.
\end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$ nên giá trị nhỏ nhất của P là 22. ■

Bài 21. Cho a, b và c là các số thực dương. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P=\frac{a+3c}{a+2b+c}+\frac{4b}{a+b+2c}-\frac{8c}{a+b+3c}.$$

Chọn HSG tỉnh Kiên Giang, 2014 - 2015

Lời giải

Đặt $\begin{cases} x=a+2b+c\\ y=a+b+2c\\ z=a+b+3c\end{cases}$ ta có $\begin{cases} a=-x+5y-3z\\ b=x-2y+z\\ c=-y+z\end{cases}$. Do đó, ta cần tìm giá trị nhỏ nhất của

$$P=\frac{4x}{y}+\frac{2y}{x}+\frac{8y}{z}+\frac{4z}{y}-17.$$

Sử dụng bất đẳng thức $AM - GM$, ta có

$$\begin{aligned}
P &\geq 2\sqrt{\frac{4x}{y}\cdot\frac{2y}{x}}+2\sqrt{\frac{8y}{z}\cdot\frac{4z}{y}}-17\\
&= 12\sqrt{2}-17.
\end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $b=(1+\sqrt{2})a, c=(4+3\sqrt{2})a$.
Vậy giá trị nhỏ nhất của P là $12\sqrt{2}-17$.

Bài 22. Cho a, b, c là ba số thực dương thỏa mãn $abc=1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a^3+b^3+1}+\frac{1}{b^3+c^3+1}+\frac{1}{c^3+a^3+1}\leq 1.$$

Chọn HSG tỉnh Long An, 2014 - 2015

Lời giải

Ta có

$$a^3+b^3+1=(a+b)(a-b)^2+ab(a+b)+abc\geq ab(a+b)+abc=ab(a+b+c).$$

Do đó, ta có

$$\frac{1}{a^3+b^3+1} \le \frac{1}{ab(a+b+c)} = \frac{c}{a+b+c}.$$

Tương tự với hai biểu thức còn lại, sau đó cộng vế với vế ta thu ngay được điều phải chứng minh.
Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$. ■

Bài 23. Cho các số thực $a, b, c \ge 1$ thỏa mãn $a+b+c=6$. Chứng minh rằng:

$$(a^2+2)(b^2+2)(c^2+2) \le 216.$$

Chọn HSG tỉnh Vĩnh Phúc, 2014 - 2015

Lời giải

Cách 1:
Không mất tính tổng quát, giả sử $a \ge b \ge c$, khi đó dễ thấy $a \ge 2$ và $c \le 2$.
Ta sẽ chứng minh rằng

$$(a^2+2)(b^2+2) \le \left(\frac{(a+b)^2}{4}+2\right)^2.$$

Thật vậy, vì $a^2+6ab+b^2-16 \ge 2^2+6.2.1+1^2-16 = 1 > 0$ nên

$$(a^2+2)(b^2+2) - \left(\frac{(a+b)^2}{4}+2\right)^2 = -\frac{1}{16}(a-b)^2\left(a^2+6ab+b^2-16\right) \le 0.$$

Do đó ta quy bài toán về chứng minh

$$\left(\frac{(6-c)^2}{4}+2\right)^2 \cdot (c^2+2) \le 216.$$

Thật vậy, vì $1 \le c \le 2$ nên

$$\begin{aligned} c^4-20c^3+150c^2-424c+104 &\le 2c^3-20c^3+300c-424c+104 \\ &= -18c^3-124c+104 \\ &\le -18c^3-124+104 \\ &= -18c^3-20 \\ &< 0. \end{aligned}$$

Từ đó ta có

$$\begin{aligned} \left(\frac{(6-c)^2}{4}+2\right)^2 \cdot (c^2+2) &= 216 + \frac{1}{16}(c-2)^2\left(c^4-20c^3+150c^2-424c+104\right) \\ &\le 216. \end{aligned}$$

Bài toán được chứng minh xong.
Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=2$. ■
Chắc hẳn nhiều bạn thắc mắc: *Sao phân tích gì mà khủng thế?*
Thực ra là mình dùng lệnh *factor* ở trong *Maple*.
Vậy nếu trong phòng thi thì làm thế nào? Mình trình bày như sau:
Xét hàm $f(c)$ trên $[1; 2]$, trong đó

$$f(c) = \left(\frac{(6-c)^2}{4}+2\right)^2 \cdot (c^2+2).$$

Ta có

$$\begin{aligned}
f'(c) &= -2\left(\frac{(6-c)^2}{4}+2\right)\cdot\frac{(6-c)}{2}\cdot(c^2+2)+\left(\frac{(6-c)^2}{4}+2\right)^2\cdot 2c\\
&= \left(\frac{(6-c)^2}{4}+2\right)^2\cdot\left(2c-\frac{(6-c)(c^2+2)}{\frac{(6-c)^2}{4}+2}\right)\\
&= 2\left(\frac{(6-c)^2}{4}+2\right)^2\cdot\left(\frac{c\left[(6-c)^2+8\right]-2(6-c)(c^2+2)}{(6-c)^2+8}\right).
\end{aligned}$$

Với phép phân tích như trên thì chúng ta đã giảm được lượng tính toán rất nhiều và chỉ cần xét dấu của $c\left[(6-c)^2+8\right]-2(6-c)(c^2+2)$ trên $(1;2)$. Ta có

$$\begin{aligned}
c\left[(6-c)^2+8\right]-2(6-c)(c^2+2) &= 3(c^3-8c^2+16c-8)\\
&= 3(c-2)(c^2-6c+4)\\
&= 3(c-2)(c-3-\sqrt{5})(c-3+\sqrt{5})\\
&> 0,\quad \forall c\in(1,2).
\end{aligned}$$

Do đó $f'(c)>0, \forall c\in(1,2)$ nên hàm $f(c)$ đồng biến trên $[1;2]$, từ đó suy ra

$$f(c)\le f(2)=216.$$

Bài toán được chứng minh xong.
Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=2$. ■

Cách 2:
Đặt $M=(a^2+2)(b^2+2)(c^2+2)$ ta có

$$\ln M=\ln(a^2+2)+\ln(b^2+2)+\ln(c^2+2).$$

Vì $a,b,c\ge 1$ và $a+b+c=6$ nên $1\le a,b,c\le 4$. Dùng kĩ thuật hệ số bất định, ta cần chứng minh với mọi $t\in[1;4]$ thì

$$f(t)=\ln(t^2+2)-(xt+y)\le 0.$$

Điều kiện cần để bất đẳng thức này đúng là $f(2)=0$ và $f'(2)=0$, từ đó giải ra được $x=\dfrac{2}{3}$ và $y=\ln 6-\dfrac{4}{3}$.
Điều kiện đủ: Xét hàm số $f(t)=\ln(t^2+2)-\dfrac{2}{3}t-\ln 6+\dfrac{4}{3}$ trên $[1;4]$.
Ta có $f'(t)=\dfrac{2(t-1)(t-2)}{3(t^2+2)}$, $f'(t)=0\Leftrightarrow t=1$ hoặc $t=2$.
Mà $f(t)$ liên tục trên $[1;4]$ và $f(2)=\max\{f(1),f(2),f(4)\}$ nên $f(x)\le f(2)=0$.
Từ đó, ta có

$$\begin{aligned}
\ln M &= f(a)+f(b)+f(c)+\frac{2}{3}(a+b+c)+\ln 216-\frac{12}{3}\\
&\le \frac{2}{3}(a+b+c)+\ln 216-\frac{12}{3}\\
&= \ln 216.
\end{aligned}$$

Suy ra $M\le 216$. Bài toán được chứng minh xong.
Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=2$. ■

Bài 24. Cho a, b, c là các số thực dương. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = \frac{8a + 3b + 4(\sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt[3]{abc})}{1 + (a+b+c)^2}.$$

Chọn HSG tỉnh, Thanh Hóa, 2014 - 2015

Lời giải

Nhận xét rằng: theo $AM - GM$ cho mẫu số (MS) thì ta có $MS \geq 2(a+b+c)$, vậy nếu tử số (TS) ta đánh giá được $TS \leq k \cdot (a+b+c)$ (k là một hằng số), thì khi đó $P \leq \dfrac{k}{2}$ và khả năng cao $\dfrac{k}{2}$ chính là giá trị lớn nhất của P. Tội gì không thử nhỉ!

Nhìn TS có các biểu thức chứa căn, mà ta cần đánh giá nó bé thua hoặc bằng $k \cdot (a+b+c)$ nên ta sẽ nghĩ ngay đến bất đẳng thức $AM - GM$. Tuy nhiên, ta chưa dự đoán được dấu bằng khi nào, nên chúng ta sẽ giả sử đẳng thức đạt được khi $a = mb = nc$, ta phải tìm m và n.

Sử dụng bất đẳng thức $AM - GM$, ta có

$$\begin{aligned}
\sqrt{ab} &= \frac{1}{\sqrt{m}}\sqrt{a \cdot bm} \leq \frac{a + bm}{2\sqrt{m}},\\
\sqrt{bc} &= \frac{1}{\sqrt{mn}}\sqrt{bm \cdot cn} \leq \frac{bm + cn}{2\sqrt{mn}},\\
\sqrt[3]{abc} &= \frac{1}{\sqrt[3]{mn}}\sqrt[3]{a \cdot bm \cdot cn} \leq \frac{a + bm + cn}{3\sqrt[3]{mn}}.
\end{aligned}$$

Từ đó ta có

$$TS \leq \left(8 + \frac{2}{\sqrt{m}} + \frac{4}{3\sqrt[3]{mn}}\right)a + \left(3 + 2\sqrt{m} + 2\sqrt{\frac{m}{n}} + \frac{4m}{3\sqrt[3]{mn}}\right)b + \left(2\sqrt{\frac{n}{m}} + \frac{4n}{3\sqrt[3]{mn}}\right)c.$$

Để $TS \leq k \cdot (a+b+c)$ thì ta phải có

$$k = 8 + \frac{2}{\sqrt{m}} + \frac{4}{3\sqrt[3]{mn}} = 3 + 2\sqrt{m} + 2\sqrt{\frac{m}{n}} + \frac{4m}{3\sqrt[3]{mn}} = 2\sqrt{\frac{n}{m}} + \frac{4n}{3\sqrt[3]{mn}}. \quad (1)$$

Ngồi trong phòng thi mà giải được cái hệ này để tìm được m, n thì... chồi ôi chắc tôi chớt... Chú ý rằng đây là một bài trong đề thi, người ra đề sẽ ra sao cho sẽ có người làm được, nên kiểu gì hệ số m, n cũng là số đẹp chứ nó không lẻ toét được. Do đó m, n là số phải sao cho mấy cái căn $\sqrt{m}$, $\sqrt[3]{mn}$, $\sqrt{\dfrac{m}{n}}$, $\sqrt{\dfrac{n}{m}}$ sẽ tính ra số đẹp. Ta sẽ chú ý đến thằng m hơn vì nó có mặt trong cả 4 cái căn, trong 4 cái căn đó có cái $\sqrt{m}$ nên ta chỉ xét $m = 1; 4; 9; 16; 25; ...$

Nếu $m = 1$ thì

$$3 + 2\sqrt{m} + 2\sqrt{\frac{m}{n}} + \frac{4m}{3\sqrt[3]{mn}} > 2\sqrt{\frac{n}{m}} + \frac{4n}{3\sqrt[3]{mn}}, \text{ không thỏa mãn điều kiện.}$$

Nếu $m = 4$, muốn cái $\sqrt[3]{mn}$ đẹp thì $n = 2; 16$. Nhưng với $n = 2$ thì cái $\sqrt{n}$ không đẹp, nên $n = 16$. Thay $m = 4, n = 16$ vào thấy nó hoàn toàn thỏa mãn (1). Thật may mắn!!!

Tuy rằng suy luận không hoàn toàn thuyết phục, nhưng cộng thêm chút may mắn kết quả lại được như ý. Trong việc gì cũng vậy, dám nghĩ, dám làm, thêm chút may mắn thì thành công.

Quay trở lại bài toán, với $m = 4, n = 16$ thì thay vào (1) ta được $k = \dfrac{28}{3}$. Như vậy, sử dụng đánh giá ở đoạn đầu ta sẽ có

$$P \leq \frac{k}{2} = \frac{14}{3}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a+b+c=1, a=4b=16c$ hay $a=\dfrac{16}{21}, b=\dfrac{4}{21}, c=\dfrac{1}{21}$.
Vậy, giá trị lớn nhất của P là $\dfrac{14}{3}$. ■

Bài 25. Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $xy+yz+zx=2xyz$. Chứng minh rằng:

$$\sqrt{\frac{x}{2y^2z^2+xyz}}+\sqrt{\frac{y}{2z^2x^2+xyz}}+\sqrt{\frac{z}{2x^2y^2+xyz}}\le 1.$$

Chọn HSG tỉnh, Gia Lai, 2014 - 2015

Lời giải

Đặt $a=\dfrac{1}{x}, b=\dfrac{1}{y}, c=\dfrac{1}{z}$ thì ta có $a,b,c>0$ và $a+b+c=2$. Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương

$$\frac{bc}{\sqrt{2a+bc}}+\frac{ca}{\sqrt{2b+ca}}+\frac{ab}{\sqrt{2c+ab}}\le 1.$$

Sử dụng bất đẳng thức $AM-GM$, ta có

$$\begin{aligned}\frac{bc}{\sqrt{2a+bc}}&=\frac{bc}{\sqrt{(a+b+c)a+bc}}\\&=\frac{bc}{\sqrt{(a+b)(a+c)}}\\&\le\frac{bc}{2}\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{a+c}\right).\end{aligned}$$

Tương tự, ta thu được

$$\begin{aligned}\frac{ca}{\sqrt{2b+ca}}&\le\frac{ca}{2}\left(\frac{1}{b+c}+\frac{1}{b+a}\right),\\\frac{ab}{\sqrt{2c+ab}}&\le\frac{ab}{2}\left(\frac{1}{c+a}+\frac{1}{c+b}\right).\end{aligned}$$

Cộng vế với vế các bất đẳng thức trên, ta thu được

$$\begin{aligned}VT&\le\frac{ab}{2}\left(\frac{1}{c+a}+\frac{1}{c+b}\right)+\frac{bc}{2}\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{a+c}\right)+\frac{ca}{2}\left(\frac{1}{b+c}+\frac{1}{b+a}\right)\\&=\frac{1}{2}\left(\frac{ab+bc}{a+c}+\frac{ab+ca}{c+b}+\frac{bc+ca}{a+b}\right)\\&=\frac{a+b+c}{2}\\&=1.\end{aligned}$$

Bài toán được chứng minh xong.
Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=\dfrac{2}{3}$ hay $x=y=z=\dfrac{3}{2}$. ■

Bài 26. Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $x \leq 1, y \leq 2$ và $x+y+z=6$. Chứng minh rằng
$$(x+1)(y+1)(z+1) \geq 4xyz.$$

Đề thi chuyển hệ lớp 10, THPT Chuyên Sư phạm, 2014 - 2015

Lời giải

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với
$$x+y+z+xy+yz+zx+1 \geq 3xyz,$$
hay
$$7+z(6-z)+xy(1-3z) \geq 0.$$
Vì $x \leq 1,\ y \leq 2$ nên $z \geq 3$, tức là $1-3z<0$ và $3z-5>0$.
Sử dụng bất đẳng thức $AM-GM$, ta có
$$xy = \frac{1}{2} \cdot 2x \cdot y \leq \frac{(2x+y)^2}{8} \leq \frac{(1+x+y)^2}{8} = \frac{(7-z)^2}{8}.$$
Do đó
$$\begin{aligned}7+z(6-z)+xy(1-3z) &\geq 7+z(6-z)+\frac{(7-z)^2}{8}(1-3z)\\ &= \frac{1}{8}(z-3)(7-z)(3z-5)\\ &= \frac{1}{8}(z-3)(1+x+y)(3z-5)\\ &\geq 0.\end{aligned}$$
Bài toán được chứng minh xong.
Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=1, y=2, z=3$. ■

Bài 27. Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $a+b+c=1$. Chứng minh rằng
$$\frac{1+a}{1-a}+\frac{1+b}{1-b}+\frac{1+c}{1-c} \leq 2\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right).$$

Chọn đội tuyển Olympic Toán lớp 10 vòng 1, Chuyên Nguyễn Du, 2014 - 2015

Lời giải

Cách 1:
Sử dụng bất đẳng thức $Cauchy-Schwarz$ ta có
$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a} \geq \frac{(a+b+c)^2}{ab+bc+ca}.$$
Mặt khác, ta có
$$\begin{aligned}\frac{1+a}{1-a}+\frac{1+b}{1-b}+\frac{1+c}{1-c} &= \frac{a+b+c+a}{b+c}+\frac{a+b+c+b}{a+c}+\frac{a+b+c+c}{a+b}\\ &= 2\left(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\right)+3.\end{aligned}$$
Do đó, ta quy bài toán về chứng minh bất đẳng thức mạnh hơn là
$$\frac{(a+b+c)^2}{ab+bc+ca} \geq \frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}+\frac{3}{2}.$$

Để ý rằng

$$\frac{(a+b+c)^2}{ab+bc+ca} - 3 = \frac{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2}{2(ab+bc+ca)},$$
$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} + \frac{3}{2} - 3 = \frac{(a-b)^2}{2(a+c)(b+c)} + \frac{(b-c)^2}{2(a+b)(a+c)} + \frac{(c-a)^2}{2(b+c)(b+a)}.$$

Do đó ta cần phải chứng minh

$$S_c(a-b)^2 + S_a(b-c)^2 + S_b(c-a)^2 \geq 0,$$

trong đó

$$\begin{cases} S_a = \dfrac{1}{2\left(ab+bc+ca\right)} - \dfrac{1}{2(a+b)(a+c)} = \dfrac{a^2}{2\left(ab+bc+ca\right)(b+c)(a+b)} \geq 0 \\ S_b = \dfrac{1}{2\left(ab+bc+ca\right)} - \dfrac{1}{2(b+c)(b+a)} = \dfrac{b^2}{2\left(ab+bc+ca\right)(b+c)(b+a)} \geq 0 \\ S_c = \dfrac{1}{2\left(ab+bc+ca\right)} - \dfrac{1}{2(c+a)(c+b)} = \dfrac{c^2}{2\left(ab+bc+ca\right)(c+a)(c+b)} \geq 0 \end{cases}$$

Vậy bất đẳng thức cuối luôn đúng, bài toán được chứng minh xong.
Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = \dfrac{1}{3}$. ■

Cách 2:
Theo cách 1, ta quy bài toán về chứng minh bất đẳng thức mạnh hơn là

$$\frac{(a+b+c)^2}{ab+bc+ca} \geq \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} + \frac{3}{2}.$$

Nhân hai vế với $ab+bc+ca$, ta cần chứng minh

$$(a+b+c)^2 \geq (ab+bc+ca)\left(\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b}\right) + \frac{3}{2}\left(ab+bc+ca\right).$$

Sử dụng bất đẳng thức quen thuộc $\dfrac{1}{x+y} \leq \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}\right)$, ta có

$$\begin{aligned} (ab+bc+ca)\left(\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b}\right) &= a^2+b^2+c^2 + abc\left(\frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} + \frac{1}{a+b}\right) \\ &\leq a^2+b^2+c^2 + \frac{abc}{4}\left(\frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{c} + \frac{1}{a} + \frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \\ &= a^2+b^2+c^2 + \frac{ab+bc+ca}{2}. \end{aligned}$$

Từ đó suy ra

$$\begin{aligned} VP &\leq a^2+b^2+c^2 + \frac{ab+bc+ca}{2} + \frac{3}{2}\left(ab+bc+ca\right) \\ &= (a+b+c)^2. \end{aligned}$$

Đó chính là điều cần chứng minh.
Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = \dfrac{1}{3}$. ■

Bài 28. Cho a, b, c, d là các số thực dương thỏa mãn $a+b+c+d=4$. Chứng minh rằng

$$P = \frac{(a+\sqrt{b})^2}{\sqrt{a^2-ab+b^2}} + \frac{(b+\sqrt{c})^2}{\sqrt{b^2-bc+c^2}} + \frac{(c+\sqrt{d})^2}{\sqrt{c^2-cd+d^2}} + \frac{(d+\sqrt{a})^2}{\sqrt{d^2-ad+a^2}} \leq 16.$$

Đề thi khảo sát đội tuyển lớp 10 vòng 2, Chuyên KHTN, 2014 - 2015

Lời giải

Ta có $a^2-ab+b^2 = \dfrac{(a+b)^2}{4} + \dfrac{3(a-b)^2}{4} \geq \dfrac{(a+b)^2}{4}$ và $(a+\sqrt{b})^2 \leq (a+b)(a+1)$ nên

$$\frac{(a+\sqrt{b})^2}{\sqrt{a^2-ab+b^2}} \leq 2(a+1).$$

Thiết lập ba biểu thức còn lại, sau đó cộng vế với vế và chú ý $a+b+c+d=4$ ta thu ngay được điều phải chứng minh.
Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=d=1$. ■

Bài 29. Cho x, y, z là các số thực dương. Chứng minh:

$$\left(1+\frac{x}{y}\right)\left(1+\frac{y}{z}\right)\left(1+\frac{z}{x}\right) \geq 2+2\cdot\frac{x+y+z}{\sqrt[3]{xyz}}.$$

Chọn đội tuyển dự thi Olympic 30-4 lớp 10, tỉnh Bình Thuận, 2014 - 2015

Lời giải

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}\right)+\left(\frac{x}{z}+\frac{y}{x}+\frac{z}{y}\right) \geq 2\cdot\frac{x+y+z}{\sqrt[3]{xyz}}.$$

Sử dụng bất đẳng thức $AM-GM$, ta có

$$\frac{x}{y}+\frac{z}{x}+\frac{z}{x} \geq 3\sqrt[3]{\frac{z^2}{xy}} = \frac{3z}{\sqrt[3]{xyz}},$$
$$\frac{y}{z}+\frac{x}{y}+\frac{x}{y} \geq 3\sqrt[3]{\frac{x^2}{yz}} = \frac{3x}{\sqrt[3]{xyz}},$$
$$\frac{z}{x}+\frac{y}{z}+\frac{y}{z} \geq 3\sqrt[3]{\frac{y^2}{xz}} = \frac{3y}{\sqrt[3]{xyz}}.$$

Cộng vế với vế ba bất đẳng thức trên, ta thu được

$$\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x} \geq \frac{x+y+z}{\sqrt[3]{xyz}}.$$

Hoàn toàn tương tự, ta cũng chứng minh được

$$\frac{x}{z}+\frac{y}{x}+\frac{z}{y} \geq \frac{x+y+z}{\sqrt[3]{xyz}}.$$

Từ đó cộng vế với vế hai bất đẳng thức trên ta thu được điều phải chứng minh.
Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z$. ■

Trong quá trình làm không tránh khỏi sai sót, rất mong nhận được phản hồi từ bạn đọc gần xa để tài liệu được hoàn thiện hơn. Mọi ý kiến đóng góp xin gửi về hòm thư: liltee.spvl@gmail.com. Xin trân trọng cảm ơn.

Tăng Hải Tuân
Lil.Tee
http://tanghaituan.com
http://ask.fm/TangHaiTuanVLPT
https://facebook.com/tanghaituan.vlpt

Tài liệu

[1] Đề thi được lấy tại chuyên mục *Thi HSG cấp Tỉnh, Thành phố. Olympic 30-4. Đề thi và kiểm tra đội tuyển các cấp* của Diễn đàn toán học http://diendantoanhoc.net.

[2] Võ Quốc Bá Cẩn, *Lời giải và bình luận đề thi Olympic qua các năm*, Bài 51 trang 20.

[3] `http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?p=3712545#p3712545`